Compte-rendu : *Anthologie de la calculabilité : Naissance et développements de la théorie de la calculabilité des années 1920 à 1970.*

(Sous la direction de Jean Mosconi et Michel Bourdeau

Introduction historique par Serge Grigorieff. Paris, Cassini, 2022)

Dans : Comptes-rendus, « Histoire intellectuelle et histoire des sciences », Revue de Synthèse, 144(3-4), 435-437.
(Version originale sensiblement différente).

Bien que la calculabilité soit au cœur de nombreuses discussions et de recherches contemporaines, il n'est pas nécessairement facile aujourd'hui de se repérer dans ce thème d'un point de vue strictement historique, notamment en langue française. Il existait le livre en anglais de M. Davis, *Computability and Unsolvability*, ou encore celui de Jean Van Heijenoort sur la logique mathématique (*From Frege to Gödel : a source book in mathematical logic, 1967*). Mais la présente anthologie, préparée grâce à une équipe nombreuse, permet enfin d'adopter une perspective générale sur la question depuis le temps de Babbage et jusqu'aux développements liés à la correspondance de Curry-Howard, en revenant à l'essentiel, à savoir les textes dans lesquels a été concrètement élaborée la théorie de la calculabilité, à l'intersection de la logique et des mathématiques et à l'origine de l'informatique théorique.

De prime abord le titre du volume omet le mémoire de Menabrea sur la machine analytique de Babbage. Bien entendu, toute anthologie suppose des choix, et les auteurs le rappellent dès la première page. L'ambition est de fournir un cadre géographique et temporel large, en laissant de côté les développements des dernières décennies. Au contraire, l'accent est mis sur des textes peu connus ou trop peu considérés. Par exemple, en 1921, Heinrich Behmann, un élève de Hilbert, semble avoir été le premier à employer l'expression « Entscheidungsproblem » [problème de la décision] : il a en effet proposé une méthode de décision en logique monadique du premier ordre (« Le problème de la décision et l'Algèbre de la logique », 1921). On doit à Moses Schönfinkel, mathématicien décédé à Moscou en 1942 dont l'importance ne fut établie que dans les années 1960, la façon de voir qui consiste à poser les fonctions comme objets premiers, et non les ensembles, et qui s'est révélée fertile quelques années plus tard (le λ-calcul), ou ensuite chez Curry et Howard (voir, de Schönfinkel, « Sur les éléments de construction de la logique mathématique », 1924). On lui doit aussi les bases de ce qu'on appelle désormais la logique combinatoire.

Les textes procurés sont donc précieux et la facture de l'ouvrage est irréprochable, comme un encouragement à sa lecture de près de 800 pages. On circule aisément dans l'épais volume au moyen des index des noms, de notions, et d'une bibliographie fort pertinente. Les notations et la restitution du vocabulaire mathématique appelaient une grande attention et le lecteur s'en satisfait si commodément qu'il en oublierait presque l'intense et louable travail d'harmonisation concertée des éditeurs, qui touche tout particulièrement les notes de traduction ou de commentaire, la graphie, et les indications relatives à l'écriture contemporaine en vigueur, non sans que soient restitués les changements de sens de certains concepts.

Premièrement, la machine analytique de Babbage (dont l'importance fut mise au jour par Marie Durand-Richard), décrite dans le mémoire de Menabrea (1842), et les réflexions d'Ada Lovelace et de Babbage lui-même furent nettemen plus élaborées que les essais antérieurs assez connus, tels la pascaline ou les réflexions de Leibniz sur le Calculus Ratiocinator. Elles ont contenu en germe les développements du XXe siècle, telles notamment l'ambition d'universalité arithmétique (si ce n'est « algébrique »), la mécanisation du raisonnement, la production d'une calculatrice programmable. Ils s'agit des lignées anglaise et italienne de la genèse de la calculabilité. Ada Lovelace, dont le rôle ne fut pas négligeable, a traduit en anglais et annoté la description de Menabrea de la machine analytique. Ses remarques, et plus largement les écrits de Babbage, ont effleuré, toutes proportions gardées celles, largement ultérieures, de Turing. Les années 1920-1930 furent celles de la théorisation des fondements de la calculabilité, bien sûr préparée par le formalisme de Hilbert, la logique de Frege, les *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead et le *Tractatus logico-philosophicus* de Wittgenstein, dont la définition du nombre est celle utilisée dans le λ-calcul de Church.

Qu'est-ce qu'une fonction calculable, et comment le vérifier ? Une fonction calculable est-elle une fonction calculable physiquement ? Qu'implique la calculabilité sur les réels ? La célèbre contribution de Turing est bien entendu présente dans le recueil et pas seulement pour sa contribution technique (les machines universelles dites de Turing). Il posa des questions qui restent essentielles : calculabilité sur les réels, notion procédure effective, et, bien entendu, dans l'article de 1953, la question de l'intelligence artificielle – article bien plus commenté et retenu que le mémoire de 1936. Qui plus est, l'anthologie permet de saisir avec précision la place de Gödel au sein de ce mouvement, au-delà des résultats dits de complétude, d'incomplétude et d'indécidabilité. Gödel a approfondi les développements antérieurs de Hilbert sur les fonctions récursives primitives (aujourd'hui appelées fonctions récursives). Avec Jacques Herbrand, logicien français décédé accidentellement en montagne à 23 ans, il a contribué à forger les modèles qui portent son nom, fondés sur les fonctions récursives primitives (dont un des objectifs est de formaliser la récursivité dans un système d'équations). La traduction de la correspondance entre Herbrand et Gödel par Paul Égré permet ainsi de mieux situer leur rôle au sein de cette époque. Le recueil offre encore les contributions également devenues classiques de Church, dont l'opérateur d'abstraction aura une postérité importante : « en logique combinatoire et en λ-calcul, tout est donc fonction » (Introduction, p. 20). Ce dernier a donné son nom à une idée déjà entrevue par Turing : toute fonction effectivement calculable est récursive (thèse de Church-Turing). La variante dite « physique » de cette thèse – toute fonction calculable par un système physique déterministe est récursive – est toujours abondamment débattue aujourd'hui. Kleene est à l'origine du théorème de la forme normale, ou encore du théorème dit de la récursion : voir à ce sujet ses travaux de 1936 et 1943.

La riche introduction de Serge Grigorieff aborde directement les fils conducteurs du thème général. Il est certain que cette anthologie constituera un outil de travail précieux en français pour toute une génération de chercheurs et d'étudiants, qu'ils soient historiens, philosophes, mathématiciens ou, bien entendu, logiciens intéressés par l'histoire en partie commune de leur disciplines. Nombreuses sont les réflexions à tirer à partir des textes présentés dans l'anthologie et il est impossible de les énumérer en détails : l'importance de Turing à propos du problème du suivi d'une règle, l'influence de Wittgenstein sur celui-ci et, bien entendu, les réflexions sur la mécanisation de la pensée mathématique ainsi que le rapport profond entre l'informatique et la logique.

Mathis Bertrand